(A)

Th. de Weierstrass (par la convolution)

Leçons : 201, 203, 209

Ref. : Gourdon, Analyse p304 (3e édition)

Th (1) : Soit $(K_n)_n$ une approximation de l'unité et $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ tq f est uniformément continue. Alors $\|f * K_n - f\|_\infty \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Th (2) : (Weierstrass)

1) $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n \, dt$ et $K_n(t) = \begin{cases} \frac{(1-t^2)^n}{a_n} & \text{si } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

M.q. $(K_n)_n$ est une approximation de l'unité

2) Soit $I = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ et $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ tq $\mathrm{Supp}\, f \subset I$

M.q. $\forall n \in \mathbb{N}$, $f * p_n$ est une fonction polynôme

3) Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$.

M.q. f est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de polynômes

Rappel déf. approx. unité :

(1) $\forall n \in \mathbb{N}$, K_n est positive et mesurable

(2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_{\mathbb{R}} K_n \, dt = 1$

(3) $\forall \delta > 0$, $\int_{[-\delta,\delta]^c} K_n \, dt \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Th (1) :

Soit $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

$$|f * K_n(x) - f(x)| \overset{(2)}{=} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x-t) K_n(t) \, dt - f(x) \int_{\mathbb{R}} K_n(t) \, dt \right|$$

$$|f * K_n(x) - f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x-t) - f(x)| K_n(t) \, dt$$

inég. tr. (7)

(1) : $K_n \geq 0$

Soit $\varepsilon > 0$. Par uniforme continuité de f,

$$\exists \delta > 0 \;/\; \begin{matrix}\forall t \in \mathbb{R} \\ \forall x \in \mathbb{R}\end{matrix}, \quad |t| \leq \delta \Rightarrow |f(x-t) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

On a donc

$$|f * K_n(x) - f(x)| \leq \int_{[-\delta,\delta]} |f(x-t) - f(x)| K_n(t)\, dt + \int_{[-\delta,\delta]^c} \overbrace{(|f(x-t)| + |f(x)|)}^{\text{inég. tr.}} K_n(t)\, dt$$

$$\leq \varepsilon \underbrace{\int_{[-\delta,\delta]} K_n(t)\, dt}_{\leq \int_{\mathbb{R}} K_n dt = 1} + 2\|f\|_\infty \int_{[-\delta,\delta]^c} K_n(t)\, dt$$

terme de droite indépendant de x

$$\|f * K_n - f\|_\infty \leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \underbrace{\int_{[-\delta,\delta]^c} K_n(t)\, dt}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

donc $\limsup_n \|f * K_n - f\|_\infty \leq \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$

donc $\boxed{\limsup_n \|f * K_n - f\|_\infty = 0}$ d'où $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \|f * K_n - f\|_\infty = 0}$

Th ②:

1). $t \mapsto (1-t^2)^n$ est continue, positive non identiquement nulle pour tout $n \in \mathbb{N}$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$ et K_n est bien définie.

. $K_n \geq 0$: c'est clair et K_n continue sur $\mathbb{R}$ donc mesurable

. $\int_{\mathbb{R}} K_n(t)\, dt = \frac{1}{a_n} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n\, dt = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

. Soit $\delta > 0$. si $\delta > 1$, $\int_{[-\delta,\delta]^c} K_n\, dt = \int_{[-\delta,\delta]^c} 0\, dt = 0$

si $1 \geq \delta > 0$: $t \mapsto (1-t^2)$ est paire donc $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = 2\int_0^1 (1-t^2)^n\, dt \geq 2\int_0^1 t\,(1-t^2)^n\, dt$$

$$\geq \frac{1}{n+1} \Big[\underbrace{-(1-t^2)^{n+1}}_{=1} \Big]_0^1$$

donc $\boxed{\frac{1}{a_n} \leq n+1}$

Ⓐ

$\forall n \in \mathbb{N}$, toujours par parité de $t \mapsto (1-t^2)$

$$0 \leq \int_{[-\delta,\delta]^c} K_n(t)\,dt = \frac{2}{a_n}\int_\delta^1 (1-t^2)^n\,dt$$) $t \mapsto (1-t^2)^n$ est déc↗

$$\leq 2(n+1)\,.\,\overbrace{(1-\delta)}^{\leq 1}\,(1-\delta^2)^n$$

$$\int_{[-\delta,\delta]^c} K_n(t)\,dt \leq 2(n+1)(1-\delta^2)^n$$

Or, $0 < 1-\delta^2 < 1$ donc $(n+1)(1-\delta^2)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc $\forall \delta > 0, \int_{[-\delta,\delta]^c} K_n(t)\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une approximation de l'unité.

2) Soit $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

$$f * K_n(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\,K_n(x-t)\,dt$$) Supp $f \subset \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

$$f * K_n(x) = \int_{-1/2}^{1/2} f(t)\,K_n(x-t)\,dt$$

Or $\begin{cases} |x-t| \leq 1 \\ |t| \leq 1/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \leq \frac{1}{2} \\ |t| \leq \frac{1}{2} \end{cases}$ (soit $x \in I$, $y \in I$)

Donc $\forall x \in I, \forall t \in I$,

$$K_n(x-t) = \frac{1}{a_n}\left(1-(x-t)^2\right)^n$$) formule binôme

$$= \sum_{k=0}^{2n} g_k(t)\,x^k$$ où g_k fonction polynôme.

d'où $$f * K_n(x) = \int_{-1/2}^{1/2} f(t) \sum_{k=0}^{2n} g_k(t)\,x^k\,dt$$) somme finie

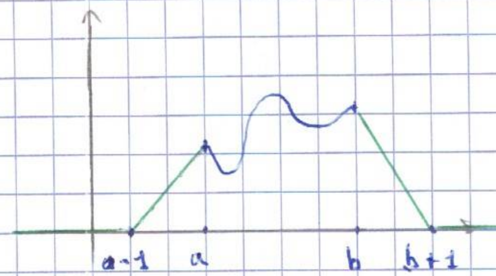
$$f * K_n(x) = \sum_{k=0}^{2n}\left(\int_{-1/2}^{1/2} f(t)\,g_k(t)\,dt\right)x^k$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $f * K_n$ est une fonction polynôme.

3) La fonction f de 2) vérifie les hyp. du Th. ①, donc

$\boxed{f \text{ est limite uniforme d'une suite de polynômes sur } I.}$

Soit maintenant $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$



__1ère étape :__ __prolonger f en $\tilde{f} \in \mathcal{C}^0_c(\mathbb{R})$__

On pose :

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \leq a-1 \text{ ou } t \geq b+1 \\ f(a)\,(t-(a-1)) \text{ si } t \in [a-1,a] \\ f(b)\,((b+1)-t) \text{ si } t \in [b,b+1] \\ f(t) \text{ si } t \in [a,b] \end{cases}$$

On a alors $\boxed{\tilde{f} \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}), \ \text{Supp}\, \tilde{f} \subset [c,d] \text{ où } c = a-1 \text{ et } d = b+1}$

__2e étape :__ __transformer $\tilde{f}$ et $\hat{f} \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, $\text{Supp}\, \hat{f} \subset \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$__

On pose $\hat{f} : t \mapsto \tilde{f}\left(\frac{1}{d-c}\, t - \frac{c+d}{2(d-c)}\right)$

Alors $\hat{f} \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ et $\text{Supp}\, \hat{f} \subset \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$,

donc $\boxed{\hat{f} \text{ est limite uniforme d'une suite } (\hat{P}_n) \text{ de polynômes sur } \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]}$

__3e étape :__ __on revient sur $[c,d] = [a-1, b+1]$ (et donc sur $[a,b]$)__

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \ P_n(t) = \hat{P}_n\left((d-c)\,t + \frac{c+d}{2}\right)$

Alors, $\boxed{P_n \text{ converge unif.}^t \text{ vers } \tilde{f} \text{ sur } [a-1, b+1]}$, donc en particulier, $\boxed{P_n \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } [a,b]}$